771. D’Amore B. (2012). Matematica: qualche chiarimento. *La Vita Scolastica*. 66, 9, 21-23.

Matematica: qualche chiarimento

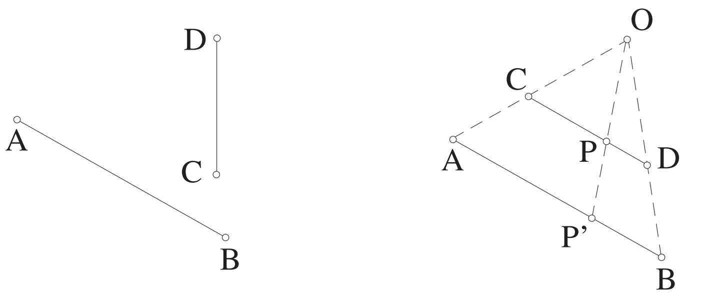
Bruno D’Amore
NRD di Bologna

Ci sono alcuni argomenti di una difficoltà concettuale o epistemologica mostruosa che, però, in qualche modo, un docente di scuola primaria deve affrontare, o per parlarne ai bambini o, talvolta, solo per avere chiarezza dentro di sé.
Ho dunque deciso di affrontare l’analisi di alcuni di tali argomenti, scelti a caso, tra quelli che più sento citare. Spero con ciò di rendere un servizio alla comunità degli insegnanti ed ai nostri lettori.
Porrò i diversi temi sotto forma di domanda.

Che cosa è una retta?
Ho sentito dire che una retta è un insieme infinito di punti che hanno tutti la stessa direzione.
Ora, questa frase è assai strampalata, per non dire di peggio. Dire “hanno tutti la stessa direzione” implica logicamente che “ogni punto ha una direzione”. Ora, che cosa è una direzione? Una direzione è una retta orientata o almeno un segmento orientato cioè un vettore. Dunque un punto, per avere una direzione, dovrebbe essere dotato di un vettore. Ma il punto ha dimensione zero mentre un segmento ha dimensione uno. E come fa un oggetto a dimensione zero ad avere al suo interno qualcosa di dimensione uno? Detto in altre parole, pretendere che un punto abbia una direzione è una frase senza alcun senso logico.
Che cosa è dunque, una retta?
Ci sono parole della geometria che possono essere descritte, ma che si preferisce non definire, per motivi linguistici. Mi spiego. Io posso dire che un poligono è una poligonale chiusa; ma devo allora dire che cosa è una poligonale: una successione di segmenti. Ma devo allora dire che cosa è un segmento: una parte di retta compresa tra due punti. Ma devo allora dire che cosa è una retta o un punto... Proseguendo così, si capisce che siamo di fronte ad una situazione imbarazzante: siccome il numero delle parole di una qualsiasi lingua naturale è finito, procedere a voler definire tutte le parole è impossibile perché, prima o poi, ci si troverà di fronte ad un circolo vizioso e si userà una parola che è già stata usata.
Di questo fatto, così logico ed evidente, si accorsero già i matematici greci fin dal secolo –III e così decisero di lasciare alcune parole che vengono usate in matematica senza definizione, proprio per l’inutilità linguistica di cercare di definire tutto; per esempio, in aritmetica, la parola numero; in geometria le parole punto, linea, retta, superficie, piano, spazio ed altre. Trovo interessante il fatto che i più grandi matematici della storia abbiano deciso di non definire questi termini, ma di usarli; sarà il loro uso reiterato che, in qualche modo, li definirà implicitamente. Mentre alcuni insegnanti vogliono a tutti i costi dare queste “definizioni” a bambini di 6-8 anni, che non ne sentono affatto l’esigenza. Si possono dare modelli fisici, concreti, di punto, di retta, di piano, tanto per dare un’idea; ma una definizione è meglio lasciarla stare...

Abbiamo due segmenti, AB e CD. AB misura 30 cm e CD misura 20 cm. Ci sono più punti nel segmento AB o nel segmento CD?

Ho sentito ragazzi anche evoluti e qualche insegnante sostenere che ciò dipende da quanto grossi si fanno i punti. Ma asserire anche che, se i punti hanno la stessa grandezza, allora ci sono più punti, ovviamente, sul segmento più lungo.
Ora, la questione è tutt'altro che banale. Fu affrontata dai Greci fin dal secolo -VI e risolta in modo matematicamente definitivo solo alla fine del XIX sec. Tuttavia, senza voler formalizzare tutto a tutti i costi, credo che bastino le seguenti considerazioni.
Il punto è un oggetto geometrico a dimensione zero; dunque non ha senso parlare di una sua eventuale grandezza o grossezza. Ha dimensione zero, cioè la sua misura è zero. Noi lo rappresentiamo con una macchietta di inchiostro, di gesso, di grafite, ma nessuna di queste è un punto, semplicemente lo vuole richiamare alla mente, lo vuole visualizzare; il punto non è visibile, dato che ha misura zero. Del resto, nessun oggetto della matematica è visibile, dato che si tratta di pure idee, di pure astrazioni.
Ecco allora che in qualsiasi segmento, in qualsiasi linea, in qualsiasi semiretta o retta, il numero dei punti è lo stesso; c'è chi dice infinito, per fare prima. Ma "infinito" non è un numero... Volendolo dire in modo più elegante e corretto, diciamo che si può dimostrare che l'insieme dei punti del segmenti AB e l'insieme dei punti del segmento CD, si possono mettere in corrispondenza biunivoca, indipendentemente dalla loro lunghezza.
Uno schema di dimostrazione per capire come ciò funziona è dato qui di seguito solo con un disegno.



Abbiamo i due segmenti, li disponiamo paralleli, tracciamo le semirette AC e BD e troviamo il punto O; ora O sia punto di proiezione dei punti di CD su quelli di AB e viceversa.
In base a ciò, vale il teorema appena enunciato.
C'è chi ha tentato di far fare questi ragionamenti ai bambini di scuola primaria, con risultati positivamente clamorosi; ma, prima, è bene che l'insegnante sia super convinto di essi... Oppure, è meglio lasciar stare.

I due aggettivi "infinito" e "illimitato" hanno lo stesso significato?
Assolutamente no, anche se si usano come tali, spesso, a scuola.
L'insieme N dei numeri naturali è illimitato perché non ha un limite; se infatti m fosse un numero naturale limite, potrei sempre scrivere m+1; e dunque m non può essere un limite. Però N è anche infinito perché contiene infiniti elementi.
La retta è illimitata perché, dato un qualsiasi punto P su di essa e un verso, posso sempre procedere oltre.
L'insieme di punti della retta è infinito; dunque la retta è illimitata e infinita.
Il segmento AB su una retta è limitato, perché ci sono i due punti A e B che lo limitano.
Ma se considero l'insieme dei punti del segmento AB, allora questo è infinito.
Dunque ci sono insiemi che sono limitati ma infiniti.

Io credo che non sia il caso di stare a cavillare con i bambini, ma che sia culturalmente e professionalmente corretto e necessario che l'insegnante usi l'aggettivo giusto al posto giusto. Semmai senza pretenderlo da parte dei suoi giovani allievi.

Esiste la proprietà dissociativa?

Restiamo nel puro campo dei numeri naturali N. La proprietà associativa, nel suo linguaggio adulto, dice che:

per ogni terna a, b, c di numeri naturali, $a+(b+c)=(a+b)+c$.

Per fare un esempio: $5+(3+4)=(5+3)+4$, cioè nella somma $5+3+4$ posso eseguire prima $5+3$ e poi $+4$; oppure prima $3+4$ e poi $+5$.

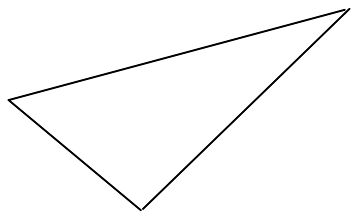
Che cosa dovrebbe dire una eventuale proprietà "dissociativa"? Che se ho $5+7$ posso pensare al 7 come $3+4$ e fare la somma $+3$ prima e $+4$ dopo.

E dov'è dunque la differenza?

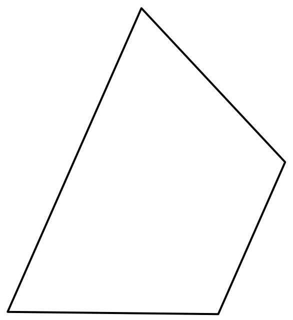
Associativa e (cosiddetta) dissociativa sono la stessa cosa...

I termini della geometria (per esempio base, altezza, lato obliquo) sono termini assoluti o relativi?

Ci affanniamo tutti a dire che, in un triangolo, ciascuno dei lati può essere considerato base.



Ma allora la stessa cosa vale per i poligoni, per esempio per i quadrilateri... Ma allora perché in un trapezio ci si accanisce sulle parole base maggiore, base minore e lato obliquo?



Che razza di quadrilatero è quello qui disegnato? Qual è il lato obliquo? Io vedo tre lati obliqui... Base maggiore, base minore, lato obliquo sono termini relativi non assoluti. Basta pensare che un rettangolo è un trapezio, un caso particolare di trapezio; nel quale si fa fatica a dire qual è il lato obliquo e quali sono la base maggiore e minore...

Ora, non sto suggerendo nulla che abbia a che fare con la didattica; quel che auspico è solo che ci sia profonda consapevolezza tra gli insegnanti.

È proprio così necessario insegnare ad effettuare la cosiddetta "prova del 9"?

L'insegnante che insegna ai propri bambini questa "prova", sa perché funziona? Se lo sa, bene, il seguente discorso è inutile e certo ha smesso di insegnarla da un pezzo; se non lo sa, allora gli farà bene vedere quel che segue.

Considero la seguente moltiplicazione:

```
372 ×
  17 =
------
3454
527-
------
9753
```

Eseguiamola prova del 9:

3	8
6	6

La prova del 9 ci dice che la precedente moltiplicazione è corretta!

Dunque? Forse possiamo guadagnare tempo per fare altre cose più interessanti?

Per chi vuol saperne di più

Arrigo G., D'Amore B., Sbaragli S, (2010). *Infiniti infiniti. Aspetti concettuali e didattici concernenti l'infinito matematico*. Trento: Erickson.

D'Amore B. (2009). *Matematica, stupore e poesia*. Firenze: Giunti.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.

Martini B., Sbaragli S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica.* Napoli: Tecnodid.